SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1994-95

Alberto Parmeggiani

QUASI-POSITIVITÀ DI OPERATORI PSEUDODIFFERENZIALI DEL 4° ORDINE

23 febbraio 1995

Tecnoprint - Bologna 1994

Riassunto. Vengono illustrate condizioni necessarie e sufficienti perché valga la stima

$$0 \leq (Pu, u) + C_K \|u\|^2_{(1/2)}, \ C_K > 0, \ \forall u \in C_0^\infty(K),$$

per ogni insieme compatto $K \subset X$, aperto di $\mathbf{R}^n$, e $P = P^* \in \Psi^4_{phg}(X)$ con $p(x, \xi) \sim q_2^2 + p_3 + p_2 + \ldots$, dove q_2 è *trasversalmente ellittico* relativamente alla varietà caratteristica $\Sigma = q_2^{-1}(0)$.

Abstract. Necessary and sufficient conditions are presented for the lower bound

$$0 \leq (Pu, u) + C_K \|u\|^2_{(1/2)}, \ C_K > 0, \ \forall u \in C_0^\infty(K)$$

to hold for any compact $K \subset X$, an open set of $\mathbf{R}^n$, and $P = P^* \in \Psi^4_{phg}(X)$ with $p(x, \xi) \sim q_2^2 + p_3 + p_2 + \ldots$, q_2 being *transversally elliptic* with respect to the characteristic manifold $\Sigma = q_2^{-1}(0)$.

Presenterò qui alcuni risultati ottenuti da Cesare Parenti e me in [PP] su alcune condizioni necessarie e sufficienti (quando disuguaglianze forti vengono considerate) per la *quasi-positività* di operatori pseudodifferenziali (ψdo) del 4°-ordine. Per quasi-positività intendo la validità di una stima del tipo

$$(Pu, u) + C\|u\|^2_{(s)} \geq 0,$$

dove $C > 0$, u è una funzione C_0^∞ e $s \geq 0$ è un numero reale.

Introduzione

Sia P un operatore pseudodifferenziale appartenente alla classe $\Psi^{2m}_{phg}(X)$ (si veda [H1]), dove X è un aperto di $\mathbf{R}^n$. Sia K un qualsiasi insieme compatto di X, e sia, per ogni $u \in C_0^\infty(K)$, (Pu, u) la forma quadratica in $L^2(X)$.

Gårding fece vedere che, per $\mu < m$ e per ogni $\varepsilon > 0$,

(1) $$(Pu, u) \geq -\varepsilon\|u\|^2_{(m)} - C_{\varepsilon,K}\|u\|^2_{(\mu)}, \quad u \in C_0^\infty(K)$$

se e solo se

(2) $$p_{2m}(x, \xi) \geq 0 \text{ in } T^*(X) \setminus 0.$$

In seguito Hörmander dimostrò ([H1], Theorem 18.1.14) che sotto la stessa condizione (2) vale una stima più forte:

(3) $$(Pu, u) \geq -C_K\|u\|^2_{(m-\frac{1}{2})}, \quad u \in C_0^\infty(K)$$

la cosiddetta *Sharp Gårding Inequality*.
Poi Melin ([M]) provò che, per $\mu < m - \frac{1}{2}$ e per ogni $\varepsilon > 0$,

(4) $$(Pu, u) \geq -\varepsilon\|u\|^2_{(m-\frac{1}{2})} - C_{\varepsilon,K}\|u\|^2_{(\mu)}, \quad u \in C_0^\infty(K)$$

se e soltanto se, indicando con $p^s_{2m-1}(x, \xi)$ il simbolo *sottoprincipale* [1] di P, (2) rimane valida e vale

(5) $$p_{2m}(x, \xi) = 0 \Longrightarrow p^s_{2m-1}(x, \xi) + \mathrm{Tr}^+(Q_{x,\xi}) \geq 0.$$

[1] Se $p(x, \xi) \sim p_{2m} + p_{2m-1} + \ldots$, allora

$$p^s_{2m-1}(x, \xi) := p_{2m-1}(x, \xi) + i\sum_{j=1}^{n} \partial^2_{x_j\xi_j} p_{2m}(x, \xi)/2.$$

Si ha che se $P = P^*$ allora p^s_{2m-1} è a valori reali, e che p^s_{2m-1} è definito in modo invariante sull'insieme $\{\rho \in T^*(X) \setminus 0;\ p_{2m}(\rho) = 0\}$.

Qui $Q_{x,\xi}$ è l'hessiana di $p_{2m}/2$ nel punto (x,ξ). (Si veda il seguito per la definizione di $\mathrm{Tr}^+(Q)$.)
Faccio notare che nel teorema dimostrato da Melin non viene fatta alcuna ipotesi sull'insieme caratteristico di P.
Infine Hörmander ha provato in [H2] che, sotto l'ulteriore ipotesi che la varietà caratteristica di P, Σ, sia C^∞ e che il simbolo principale di P, p_{2m}, sia *trasversalmente ellittico* su Σ (più una condizione di rango costante della forma simplettica su Σ (si veda [H2])), (2) e (5) implicano: per ogni compatto $K \subset X$ esiste una costante $C_K > 0$ tale che

$$(Pu,u) \geq -C_K \|u\|^2_{(m-1)}. \tag{6}$$

Ricordo che la *trasversale ellitticità* di p_{2m} su Σ significa che per ogni compatto $L \subset X$ esiste $C_L > 0$ tale che

$$C_L^{-1}\mathrm{dist}_\Sigma(x,\xi)^2|\xi|^{2(m-1)} \leq p_{2m}(x,\xi) \leq C_L \mathrm{dist}_\Sigma(x,\xi)^2|\xi|^{2(m-1)},$$

$\forall (x,\xi) \in L \times \mathbf{R}^n \setminus 0$ $(|\xi| > 1)$, dove $\mathrm{dist}_\Sigma(x,\xi)$ indica la distanza del punto (x,ξ) dalla varietà Σ.

Usando metodi differenti (e cioè una versione microlocale della decomposizione di Calderón-Zygmund) Fefferman e Phong hanno provato (si veda [FP]) il seguente risultato: per $P = p(x,D)$ con $0 \leq p(x,\xi) \in S^2(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ (i.e. *simbolo totale nonnegativo*) vale la seguente stima:

$$\mathrm{Re}(Pu,u) \geq -C\|u\|^2_{(0)}, \ C > 0, \ \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n). \tag{7}$$

In [PP] ci siamo posti il problema di trovare condizioni necessarie e sufficienti su $P = P^* \in \Psi^4_{phg}(X)$, il cui simbolo principale è della forma $p_4(x,\xi) = q_2(x,\xi)^2$, scritte in termini di condizioni su $p_3^s(x,\xi)$ e sulla parte del 2°-ordine del simbolo (di Weyl) di P sui punti di $\Sigma = q_2^{-1}(0)$ affinché valga la stima: per ogni compatto K sottoinsieme di X, esiste $C_K > 0$ tale che

$$(Pu,u) \geq -C_K\|u\|^2_{(1/2)}, \ \forall u \in C_0^\infty(K).$$

Voglio far osservare che un controllo sulla quasi-positività di operatori del 4°-ordine è il primo passo per ottenere stime a priori del tipo: dati $P = P^*$ e $Q = Q^*$ appartenenti alla classe Ψ^2, allora esistono $\varepsilon > 0$ e $C > 0$ tali che

$$\|Qu\| \leq C(\|Pu\| + \|u\|_{(\varepsilon)}), \ \forall u \in C_0^\infty.$$

Ciò si riduce alla quasi-positività dell'operatore del 4°-ordine $P^2 - Q^2$. (Si veda a riguardo [F] oppure [P].)
Concludo questa introduzione dando alcuni esempi di operatori la cui positività viene stabilita dal nostro risultato. Si considerino i seguenti simboli (di Weyl[2]) del quarto ordine:

$$p(x,\xi) = \left(\mu_1(\xi_1^2 + x_1^2\xi_4^2) + \mu_2(\xi_2^2 + x_2^2\xi_4^2) + \xi_3^2\right)^2 + \alpha_1(x,\xi)(\xi_1^2 + x_1^2\xi_4^2) +$$

$$+\alpha_2(x,\xi)(\xi_2^2 + x_2^2\xi_4^2) + \beta(x,\xi)\xi_3^2 + \gamma\left(\xi_4^2 + x_3(x_1^2 + x_2^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)\right),$$

dove $\mu_i, i = 1,2, \gamma$ sono parametri reali, con $\mu_i > 0, i = 1,2$, e $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in S^1$ sono simboli reali classici di ordine 1. In questo caso la varietà caratteristica è data da

$$\Sigma = \{(x,\xi) \in \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4;\ x_1 = x_2 = \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0, \xi_4 \neq 0\}.$$

Negli esempi seguenti scriverò $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ per $\alpha_i(\rho), i = 1,2, \beta(\rho)$, dove $\rho \in \Sigma$, con $|\xi_4| = 1$, e perciò verranno considerati come parametri. Le seguenti relazioni tra i parametri implicano la positività dell'operatore pseudodifferenziale corrispondente.

(a) Se $\alpha_i \geq 0, i = 1,2$, allora sia

$$\gamma > -\left((\mu_1 + \mu_2)^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 + \alpha_1 + \alpha_2\right),$$

$$\frac{1}{2}\beta > -(\mu_1 + \mu_2) - \sqrt{(\mu_1 + \mu_2)^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma}.$$

(b) Se $\alpha_1 \geq 0 \geq \alpha_2$, e $\mu_1 + \mu_2 \geq |\alpha_2|/(2\mu_2)$, consideriamo le stesse condizioni su γ e β.

(c) Se $\alpha_1 \geq 0 > \alpha_2$, e $\mu_1 + \mu_2 < |\alpha_2|/(2\mu_2)$, allora bisogna supporre $|\alpha_2|/(2\mu_2) = \mu_1 + (2k_0 + 1)\mu_2$, dove $k_0 \in \mathbf{N}(= \{1,2,\ldots\})$ è fissato. Prendiamo in questo caso

$$\gamma > -\left(\alpha_1 + 2\mu_1^2 - 4k_0(k_0+1)\mu_2^2\right),$$

[2]Ciò vuol dire che il ψdo associato è

$$p^w(x,D)u(x) = \iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle} p(\frac{x+y}{2},\xi)u(y)dyd\xi\ ,\ u \in \mathcal{S}.$$

Nel caso particolare, a $x\xi$ si deve associare $(xD_x + D_x x)/2$, dove $D_x = -i\partial_x$.

$$\frac{1}{2}\beta > -(\mu_1+\mu_2) - \sqrt{\gamma + \alpha_1 + 2\mu_1^2 - 4k_0\mu_2^2}.$$

(d) Se $\alpha_i \leq 0, i = 1,2$, e $\mu_1 + \mu_2 \geq |\alpha_i|/(2\mu_i), i = 1,2$, allora γ e β devono essere come in (a) e (b) sopra.

(e) Se $\alpha_i < 0$, $i = 1,2$, e $|\alpha_1|/(2\mu_1) \leq \mu_1 + \mu_2 < |\alpha_2|/(2\mu_2)$, dobbiamo richiedere che $|\alpha_2|/2\mu_2 = \mu_1 + (2k_0+1)\mu_2$, e allora prendiamo γ e β come in (c) sopra.

(f) Se $\alpha_i < 0$, $i = 1,2$, e $|\alpha_i|/(2\mu_i) > \mu_1 + \mu_2$, $i = 1,2$, richiedendo $|\alpha_2|/(2\mu_2) = \mu_1 + (2k_0+1)\mu_2$, e se

$$\frac{|\alpha_1|}{2\mu_1} < \frac{|\alpha_2|}{2\mu_2},$$

(che è una condizione compatibile) allora possiamo prendere

$$\gamma > -\Big(\alpha_1 + 2\mu_1^2 - 4\mu_2^2 k_0(k_0+1)\Big),$$

$$\frac{1}{2}\beta > -(\mu_1+\mu_2) - \sqrt{\gamma + \alpha_1 + 2\mu_1^2 - 4k_0\mu_2^2}.$$

Enunciato del teorema

Mi limiterò qui ad enunciare il teorema in un caso semplificato, per evitare notazione complicate.
Sia X una varietà C^∞, $\Omega^{\frac{1}{2}}$ il fibrato delle $\frac{1}{2}$–densità su X, e $P \in \Psi^4_{phg}(X, \Omega^{\frac{1}{2}})$ un *ψdo propriamente supportato*[3], *autoaggiunto* e tale che le seguenti ipotesi ($(H1)$ fino a $(H6)$) siano soddisfatte:

$(H1)$: il simbolo principale di P, p_4, sia della forma $p_4(x,\xi) = q_2(x,\xi)^2$;

$(H2)$: $q_2 \geq 0$ è *trasversalmente ellittico* su

$$\Sigma = \{\rho \in T^*(X) \setminus 0;\ q_2(\rho) = 0\};$$

$(H3)$: Σ è una varietà C^∞;

[3]Ricordo che *propriamente supportato* vuol dire che se $K(x,y)$ è il nucleo distribuzione dell'operatore P, allora le proiezioni π_x, π_y: supp$K \to X$ alle variabili x e alle variabili y sono *mappe proprie*.

$(H4)$: la forma simplettica ha *rango costante* su Σ;
$(H5)$: $p_3^s(\rho) = 0$, $dp_3^s(\rho) = 0$ per $\rho \in \Sigma$.

L'ipotesi $(H2)$ implica che $q_2(\rho) = 0 \Longrightarrow dq_2(\rho) = 0$ cosicché l'hessiana di $q_2/2$ e di $p_3^s/2$, $Q_2 = Q_{2,\rho}$ e $Q_3 = Q_{3,\rho}$ rispettivamente, sono definite in modo **invariante** su Σ. In più , $(H2)$ e $(H5)$ implicano che $\mathrm{Rad}(Q_2) = T_\rho(\Sigma) \subset \mathrm{Rad}(Q_3)$. Ha senso perciò fare la seguente ipotesi:
sia $\rho \in \Sigma$ e siano $F = F(\rho)$ e $G = G(\rho)$ le matrici fondamentali di Q_2 e Q_3 rispettivamente (i.e.

$$Q_2(X) = \sigma(X, FX),\ Q_3(X) = \sigma(X, GX), \forall X \in V := T_\rho(T^*(X))$$

dotato in modo naturale (tramite cioè l'isomorfismo con $T_\rho^*(T^*(X))$) della forma simplettica σ). Si supponga perciò :

$$(H6) \qquad [F, G] = 0, \quad \text{per ogni } \rho \in \Sigma.$$

Devo introdurre ancora qualche notazione: si ha che (si veda il seguito di queste note) Q_2 e Q_3 ammettono una forma normale simplettica del tipo,

$$Q_2(X) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i(x_i^2 + \xi_i^2) + \sum_{i=k+1}^{k+l} x_i^2$$

$$Q_3(X) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(x_i^2 + \xi_i^2) + \sum_{i=k+1}^{k+l} \lambda_i x_i^2,$$

dove $X = (x, \xi)$ in coordinate simplettiche x, ξ; $\mu_i > 0$, α_i, $\lambda_i \in \mathbf{R}$. Si definisca $\beta := \min\{\lambda_i;\ k+1 \le i \le k+l\}$.
Ora faccio l'ipotesi semplificativa (si veda [PP] per il caso generale) che

$$\frac{|\alpha_i|}{2\mu_i} \le \mathrm{Tr}^+ Q_2,\ \forall i \in \{j;\ \alpha_j < 0\}.$$

Definisco, come usuale,

$$\mathrm{Tr}^+(Q_2) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i,\ \mathrm{Tr}^+(Q_2^2) := \sum_{i=1}^{k} \mu_i^2,\ \mathrm{Tr}(Q_3) := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i.$$

Faccio notare che $\mathrm{Tr}^+(Q_2^2) = \mathrm{Tr}^+(-F^2)$.

Finalmente indico con $p_2^w(\rho)$, $\rho \in \Sigma$, l'invariante di Weyl di ordine 2 del simbolo di P. È importante notare che p_2^w è definito in modo **invariante** su Σ perché anche $p_3^s = 0$ e $dp_3^s = 0$ per $\rho \in \Sigma$.
Per completezza scrivo il suddetto invariante:

$$p_2^w(x,\xi) = p_2(x,\xi) + \frac{i}{2} < \partial_x, \partial_\xi > p_3(x,\xi) - \frac{1}{8} < \partial_x, \partial_\xi >^2 p_4(x,\xi).$$

Posso ora enunciare il teorema.

Teorema. *Sia $P = P^* \in \Psi^4_{phg}(X, \Omega^{\frac{1}{2}})$ propriamente supportato e soddisfacente alle ipotesi $(H1)$-$(H6)$. Allora: per ogni K, compatto di X, esiste $C_K > 0$ tale che*

$$(Pu, u) \geq -C_K \|u\|^2_{(1/2)}, \quad u \in C_0^\infty(K), \tag{8}$$

implica che per ogni $\rho = (x^0, \xi^0) \in \Sigma$, $|\xi^0| > 1$ (definito tramite una qualche metrica riemanniana su T^*X) [4]si ha

$$p_2^w(\rho) \geq -\Big((\mathrm{Tr}^+(Q_2))^2 + \mathrm{Tr}^+(Q_2^2) + \mathrm{Tr}Q_3\Big); \tag{9}$$

$$\gamma_-(\rho) := -\mathrm{Tr}^+(Q_2) - \sqrt{p_2^w(\rho) + (\mathrm{Tr}^+(Q_2))^2 + \mathrm{Tr}^+(Q_2^2) + \mathrm{Tr}Q_3} \leq \frac{1}{2}\beta. \tag{10}$$

Viceversa, disuguaglianze strette nelle condizioni (9) e (10) implicano (8).

Il teorema è locale, perciò si può supporre che X sia un aperto di $\mathbf{R}^n$.

Osservazione. *Nel caso particolarmente semplice in cui $Q_3(X) \geq 0$, le condizioni nel teorema sono molto più semplici e assumono la forma*

$$p_2^w(\rho) \geq -((\mathrm{Tr}^+(Q_2))^2 + \mathrm{Tr}^+(Q_2^2) + \mathrm{Tr}Q_3), \quad \forall \rho \in \Sigma.$$

La condizione (10) è ora banale.

[4]Il fatto di prendere $|\xi^0| > 1$ non è assolutamente una restrizione. Ciò dipende dalla scelta fatta di usare lo spazio Ψ^4_{phg} invece dello spazio degli operatori pseudodifferenziali classici.

Idea della dimostrazione

L'idea della prova è la seguente: dapprima si prova un lemma di classificazione simplettica delle forme definite da Q_2 e da Q_3. Poi si ottiene una condizione necessaria facendo agire l'operatore su una funzione test dipendente da un parametro che si fa poi tendere all'infinito. Ciò che si ottiene in questo modo è allora una stima che deve valere sullo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ per certi operatori differenziali con coefficienti polinomiali. Usando poi particolari funzioni in $\mathcal{S}$, si ottengono condizioni su particolari polinomi (simplettici e involutivi) che devono necessariamente risultare non-negativi. Questo fornisce allora condizioni sui loro coefficienti: le condizioni (9) e (10).

Il viceversa si prova facendo vedere che, sotto le suddette condizioni (9) e (10) (ma con **disuguaglianze strette**), si può scrivere P nella forma seguente:

$$P = Q^*Q + R, \ Q \in \Psi^2_{phg}, \ R \in \Psi^3_{phg},$$

dove R soddisfa alle ipotesi di Hörmander per ottenere la stima (6):

$$r_3(x,\xi) \geq 0$$

è **trasversalmente ellittico** su Σ, e vale

$$r_3(x,\xi) = 0 \Longrightarrow r_2^s(x,\xi) + \mathrm{Tr}^+ Q_{x,\xi}(R) \geq 0. \tag{11}$$

Se ciò fosse possibile "globalmente" su K, allora si avrebbe:

$$(Pu,u) = \|Qu\|^2_{(0)} + (Ru,u) \geq -C_K \|u\|^2_{(1/2)}$$

in virtù della disuguaglianza (6). Poiché ciò non è in generale possibile, ma lo è **microlocalmente**, si dovrà mostrare come si passa dalla stima microlocale a quella locale. Per far ciò si nota che la stima microlocale è stabile per perturbazioni del 2° ordine che si annullano d'ordine 2 su Σ, perciò , in particolare, sarà vero per una perturbazione del tipo $\mathrm{Op}(q_2)$[5].

[5]Ricordo che

$$\mathrm{Op}(q_2)u(x) = \int e^{i<x,\xi>} q_2(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi, \ u \in C_0^\infty.$$

L'ipotesi $(H6)$ dà il seguente lemma di algebra lineare simplettica:

Lemma. *Sia (V, σ) uno spazio vettoriale simplettico su $\mathbf{R}$, e siano $Q_1(X) = \sigma(X, FX)$ e $Q_2(X) = \sigma(X, GX)$, $X \in V$, forme quadratiche tali che Q_1 è semidefinita positiva. Si supponga che*

$$(i) \qquad \mathrm{Rad}Q_1 = \mathrm{Ker}F \subset \mathrm{Rad}Q_2 = \mathrm{Ker}G$$

e che

$$(ii) \qquad [F, G] = 0.$$

Si possono allora trovare coordinate simplettiche (x, ξ) tali che

$$Q_1(x, \xi) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i(x_i^2 + \xi_i^2) + \sum_{i=k+1}^{k+l} x_i^2 \tag{12}$$

e

$$Q_2(x, \xi) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(x_i^2 + \xi_i^2) + \sum_{i=k+1}^{k+l} \lambda_i x_i^2, \tag{13}$$

dove $\mu_i > 0$ e α_i, $\lambda_i \in \mathbf{R}$.

La dimostrazione del Lemma è una conseguenza del risultato di classificazione simplettica di forme quadratiche (si veda [H2] e [PP]).

Come detto sopra, scriverò $P = Q^*Q + R$. Si deve perciò determinare la serie asintotica dei simboli degli operatori che intervengono. Farò questo usando il Calcolo di Weyl, il quale è cruciale in questo contesto poiché è il calcolo pseudodifferenziale che dà automaticamente gli invarianti del simbolo di P di ordine superiore sulla varietà Σ. Si ha il seguente

Lemma. *Sia $P = P^* \in \Psi^4_{phg}$, $Q \in \Psi^2_{phg}$ con $p \sim p_4 + p_3 + p_2 + \dots$ e $q \sim q_2 + q_1 + q_0 + \dots$. Si supponga di avere la fattorizzazione seguente: $P = Q^*Q + R$, con $R \in \Psi^3_{phg}$. Allora, se r_k^w è il simbolo di Weyl di ordine k di R,*

$$p_4(x, \xi) = |q_2(x, \xi)|^2,$$

$$r_3^w = p_3^s - 2\mathrm{Re}(q_2\bar{q}_1^s) + \frac{i}{2}\{\bar{q}_2, q_2\},$$

$$r_2^w = p_2^w - 2\mathrm{Re}(q_2\bar{q}_0^w) + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\{\partial_{\xi_k}\bar{q}_2, \partial_{x_k}q_2\} - |q_1^s|^2 + \frac{i}{2}(\{\bar{q}_1^s, q_2\} + \{\bar{q}_2, q_1^s\}).$$

In particolare[6], *se* $P = Q^*Q + R$, *con* $Q = Q^*\mathrm{mod}\Psi^0$, *si ottiene che* q_2 *e* q_1^s *sono a valori reali e su* Σ *vale*

$$r_2^w(\rho) = p_2^w(\rho) + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{\partial_{\xi_k}q_2, \partial_{x_k}q_2\}(\rho) - (q_1^s(\rho))^2.$$

Traccia della dimostrazione. Se $p \sim \sum_{j\geq 0} p_{4-j}$ allora il suo simbolo di Weyl è dato da

$$\sum_{j\geq 0}\sum_{k\geq 0}\frac{i^k}{2^k k!} < \partial_x, \partial_\xi > p_{4-j}.$$

Riguardo Q^*Q si ha: $\sigma^w(Q^*Q) = \bar{q}^w(x,D)q^w(x,D) = (\bar{q}\sharp q)^w(x,D)$ (si veda [H2]) cosicché

$$\sigma^w(Q^*Q) \sim \sum_{l,j\geq 0}\sum_{k\geq 0}\frac{i^k}{2^k k!}(< D_y, D_\xi > - < D_x, D_\eta >)^k \bar{\sigma}^w_{2-j}(Q)(x,\xi)\sigma^w_{2-l}(Q)(y,\eta)_{|\Delta}$$

dove $\Delta = \{x = y, \xi = \eta\}$. Il risultato segue dal confronto delle rispettive omogeneità . •

Necessità

P è supposto essere propriamente supportato, e la disuguaglianza (8) essere valida per funzioni C_0^∞. Prendo allora una funzione $\chi \in C_0^\infty(X)$ con $\chi \equiv 1$ in un intorno di K e di suppPu. Si ha allora che $Pu = \chi Pu\chi = p(x,D)u$, $u \in C_0^\infty(K)$, con $p \in S^4_{phg}$, $p \sim p_4 + p_3 + p_2 + \ldots$ su K. Sia $\rho = (x^0, \xi^0) \in T^*(X)\setminus 0$ tale che x^0 stia nella parte interna di K, $|\xi^0| > 1$, e sia $v \in$

[6]Ricordo che { , } indica la *parentesi di Poisson*:

$$\{f,g\} = \sum_{j=1}^{n}\Big(\partial_{\xi_j}f\partial_{x_j}g - \partial_{x_j}f\partial_{\xi_j}g\Big).$$

$C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Prendo $|\xi^0| > 1$ poiché sono interessato (come usuale) a grandi valori di ξ (e poiché in questo modo siamo nel dominio di omogeneità dei termini della serie asintotica del simbolo di P).
Per $t > 1$ considero la seguente funzione:

$$u(x) = e^{it^2 <x,\xi^0>} v(t(x - x^0)).$$

Si ha allora che $u \in C_0^\infty(K)$ quando t è grande. La trasformata di Fourier di u è :

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-i<x,\xi> + it^2 <x,\xi^0>} v(t(x - x^0))dx =$$

$$= t^{-n} e^{-i<x^0, \xi - t^2\xi^0>} \hat{v}(\frac{\xi}{t} - t\xi^0).$$

Perciò :

$$\|u\|^2_{(1/2)} = \int (1 + |\xi|^2)^{1/2} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = t^{2-n} \int (\frac{1}{t^4} + |\frac{1}{t}\eta + \xi^0|^2)^{1/2} |\hat{v}(\eta)|^2 d\eta,$$

e quindi $\|u\|^2_{(1/2)} = t^{2-n}(|\xi^0| \|v\|^2 + o(1))$ per $t \to +\infty$.
Calcolo ora Pu : si ha $p(x, D)u(x) =$

$$= \int e^{i<x, t^2\xi^0 + t\eta> - i<x^0, t\eta>} p(x, t\eta + t^2\xi^0)\hat{v}(\eta)d\eta =$$

$$= \int e^{i<t(x-x^0), \eta>} e^{i<x, t^2\xi^0>} p(x, t\eta + t^2\xi^0)\hat{v}(\eta)d\eta.$$

Pongo

$$\phi_t(x) := \int \exp(i < x, \eta >) p(x^0 + x/t, t^2\xi^0 + t\eta)\hat{v}(\eta)d\eta,$$

e quindi si ottiene

$$Pu(x) = e^{it^2 <x,\xi^0>} \phi_t(t(x - x^0)). \tag{14}$$

Un'espansione in serie di Taylor del simbolo (con punto iniziale $(x^0, \xi^0) \in T^*(X) \setminus 0$), usando la definizione di ϕ_t, dà , previa divisione per t^{8-n},

$$t^{n-8}(Pu, u) = p_4(x^0, \xi^0)\|v\|^2 + O(t^{-1}) \geq -C_K t^{2-8}(|\xi^0| \|v\|^2 + o(1)) \longrightarrow 0$$

per $t \to +\infty$. Allora deve essere $p_4(x^0, \xi^0) \geq 0 \forall (x^0, \xi^0) \in T^*(X) \backslash 0\, (|\xi^0| > 1)$, (cosa che sappiamo già per ipotesi). Scelgo ora $\rho \in \Sigma$ (sempre con $|\xi^0| > 1$). Scrivo (con $p^{(\beta)}_{(\alpha)}(\rho) = \partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi p(\rho)$)

$$Q_4(x, \xi) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=4} \frac{1}{\alpha!\beta!} p^{(\beta)}_{4(\alpha)}(\rho) x^\alpha \xi^\beta = (Q_2(x, \xi))^2,$$

dove $Q_2(x, \xi)$ è l'hessiana di $q_2/2$ in ρ, e

$$Q_3(x, \xi) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2} \frac{1}{\alpha!\beta!} p^{(\beta)}_{3(\alpha)}(\rho) x^\alpha \xi^\beta.$$

Si ottiene allora, passando al limite per $t \to +\infty$,

$$(\{Q_4(x, D) + Q_3(x, D) + p_2(\rho)\}\psi, \psi) \geq 0, \ \forall \psi \in \mathcal{S}. \tag{15}$$

Uso ora il Calcolo di Weyl: si ha che $Q_4(x, D) = b^w(x, D)$ dove

$$b(x, \xi) = e^{-i<D_x, D_\xi>/2} Q_4(x, \xi) =$$

$$= Q_4(x, \xi) + \frac{i}{2} <\partial_x, \partial_\xi> Q_4(x, \xi) - \frac{1}{8} <\partial_x, \partial_\xi>^2 Q_4(x, \xi),$$

da cui segue che

$$b^w(x, D) = Q_4^w(x, D) + \frac{i}{2}(<\partial_x, \partial_\xi> Q_4)^w(x, D) - \frac{1}{8}(<\partial_x, \partial_\xi>^2 Q_4)^w(x, D)$$

(faccio osservare che l'ultimo termine è una costante che calcolerò dopo). Si ha

$$Q_2^w(x, D)^2 = (Q_2 \sharp Q_2)^w(x, D) =$$

$$= \left(Q_2(x, \xi)^2\right)^w(x, D) + \frac{-i}{2}\{Q_2, Q_2\}^w(x, D) - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^n \{\partial_{\xi_k} Q_2, \partial_{x_k} Q_2\}.$$

Calcolo l'ultimo addendo usando una trasformazione simplettica lineare che porta Q_2 nella forma normale (12):

$$Q_2(x, \xi) = \sum_{j=1}^k \mu_j (x_j^2 + \xi_j^2) + \sum_{j=k+1}^{k+l} x_j^2.$$

La rappresentazione di Weyl è *invariante* rispetto a tali trasformazioni, perciò ottengo

$$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\{\partial_{\xi_j}Q_2, \partial_{x_j}Q_2\} = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{k}4\mu_j^2 = \mathrm{Tr}^+(Q_2^2).$$

Inoltre

$$-\frac{1}{8}(<\partial_x, \partial_\xi>^2 Q_4)^w(x,\xi) = -\mathrm{Tr}^+(Q_2^2).$$

Allora

$$Q_4(x,D) + Q_3(x,D) + p_2(\rho) =$$

$$= (Q_2^2)^w(x,D) + \frac{i}{2}(<\partial_x, \partial_\xi> Q_4)^w(x,D) - \frac{1}{8}(<\partial_x, \partial_\xi>^2 Q_4)^w(x,D) +$$

$$+Q_3^w(x,D) + \frac{i}{2}(<\partial_x, \partial_\xi> Q_3)^w(x,D) + p_2(\rho) =$$

$$= Q_2^w(x,D)^2 + \mathrm{Tr}^+(Q_2^2) + \Big(Q_3^w(x,D) + \frac{i}{2}(<\partial_x, \partial_\xi> Q_4)^w(x,D)\Big) +$$

$$+\Big(p_2(\rho) + \frac{i}{2}(<\partial_x, \partial_\xi> Q_3)^w(\rho) - \frac{1}{8}(<\partial_x, \partial_\xi>^2 Q_4)^w(\rho)\Big) =$$

$$= Q_2^w(x,D)^2 + Q_3^{s,w}(x,D) + p_2^w(\rho) + \mathrm{Tr}^+(Q_2^2), \tag{16}$$

dove $Q_3^{s,w}(x,D)$ indica la quantizzazione di Weyl dell'hessiana di $p_3^s/2$ nel punto $\rho \in \Sigma$. Perciò

$$(\{Q_4(x,D)+Q_3(x,D)+p_2(\rho)\}\psi,\psi) = (\{Q_2^w(x,D)^2+Q_3^{s,w}(x,D)+p_2^w(\rho)+\mathrm{Tr}^+(Q_2^2)\}\psi,\psi), \tag{17}$$

e si ottiene, in virtù della forma normale di Q_2 e $Q_3 = Q_3^s$,

$$Q_2^w(x,D)\psi = \sum_{j=1}^{k}\mu_j(x_j^2 + D_j^2)\psi + \sum_{j=k+1}^{k+l} x_j^2\psi,$$

$$Q_3^{s,w}(x,D)\psi = \sum_{j=1}^{k}\alpha_j(x_j^2 + D_j^2)\psi + \sum_{j=k+1}^{k+l} \lambda_j x_j^2\psi,$$

la seguente *disuguaglianza necessaria*:

$$\|Q_2^w(x,D)\psi\|^2+(Q_3^{s,w}(x,D)\psi,\psi)+\{p_2^w(\rho)+\mathrm{Tr}^+(Q_2^2)\}\|\psi\|^2 \geq 0, \ \forall\psi \in \mathcal{S}. \tag{18}$$

Posso ora mostrare come si arriva alla condizione necessaria (9):

Proposizione. *Se vale (18) allora deve essere*

$$p_2^w(\rho) \geq -((\mathrm{Tr}^+ Q_2)^2 + \mathrm{Tr}^+ Q_2^2 + \mathrm{Tr} Q_3).$$

Ho qui definito $Q_3 = Q_3^s$.

Traccia della prova. Scelgo $\psi_\beta \in \mathcal{S}$, con $\beta \in (\mathbf{N} \cup \{0\})^k$, della forma

$$\psi_\beta(x) = \varphi_\beta(x_1, \ldots, x_k)\chi(\frac{x_{k+1}}{\varepsilon}, \ldots, \frac{x_n}{\varepsilon})\varepsilon^{(k-n)/2},$$

dove $\varphi_\beta \in \mathcal{S}$ è scelta in tal modo che $(x_j^2 + D_j^2)\varphi_\beta = (2\beta_j + 1)\varphi_\beta$, $\|\varphi_\beta\| = 1$, e $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-k})$. Calcolando i vari termini e passando al limite per $\varepsilon \to 0+$, si ottiene che deve essere

$$\Big\{\Big(\sum_1^k \mu_j(2\beta_j + 1)\Big)^2 + \sum_1^k \alpha_j(2\beta_j + 1) + \mathrm{Tr}^+ Q_2^2 + p_2^w(\rho)\Big\}\|\chi\|^2 \geq 0,$$

e cioè , $\forall \beta \in (\mathbf{N} \cup \{0\})^k$,

$$\Big(\sum_{j=1}^k \mu_j(2\beta_j + 1)\Big)^2 + \sum_{j=1}^k \alpha_j(2\beta_j + 1) + \mathrm{Tr}^+ Q_2^2 + p_2^w(\rho) \geq 0. \tag{19}$$

La conclusione della prova segue dal seguente lemma che dà una condizione su $p_2^w(\rho)$ affinché la (19) valga.

Lemma. *Siano* $\mu_i > 0$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$, *per* $i \in I = \{1, 2, \ldots, k\}$. *Sia* $R = \{x \in \mathbf{Z}^k;\ x_i \geq 1, x_i$ dispari $, i \in I\}$. *Definisco* $\gamma = \mathrm{Tr}^+ Q_2^2$, $\delta = \mathrm{Tr} Q_3$, $\nu = \mathrm{Tr}^+ Q_2$ *e* $c = p_2^w(\rho)$. *Si consideri su* R *il polinomio (notazioni ovvie)*

$$p(x) = <x, \mu>^2 + <\alpha, x> + \gamma + c.$$

Allora da $p(x) \geq 0\ \forall x \in R$ *segue*

$$c \geq -(\nu^2 + \delta + \gamma).$$

Da qui si ottiene immediatamente che

$$p_2^w(\rho) \geq -((\mathrm{Tr}^+(Q_2))^2 + \mathrm{Tr}^+(Q_2^2) + \mathrm{Tr}Q_3),$$

e la proposizione è dimostrata . •

Occorre una ulteriore informazione: un controllo sull'autovalore minimo della forma quadratica Q_3 nelle variabili involutive. Se $\beta := \lambda_{min}(A)$, dove $A =$diag$(\lambda_j; k+1 \leq j \leq k+l)$. Allora

Proposizione. *Si ha:*

$$\frac{1}{2}\beta \geq -\mathrm{Tr}^+Q_2 - \sqrt{(\mathrm{Tr}^+(Q_2))^2 + \mathrm{Tr}^+(Q_2^2) + \mathrm{Tr}Q_3 + p_2^w(\rho)}.$$

Traccia della dimostrazione. Si prende $\psi(x', x'', x''') = \varphi_0(x')v(x'', x''')$, v da scegliere in seguito, $\psi \in \mathcal{S}$, e φ_0 il "ground state" degli oscillatori armonici considerati. Se si calcola (18) su ψ, si ha che

$$\{(\sum_1^k \mu_i)^2 + \mathrm{Tr}^+Q_2^2 + p_2^w(\rho)\}\|v\|^2 + (\sum_1^k \alpha_i)\|v\|^2 +$$

$$+(\{2\mathrm{Tr}^+Q_2 \sum_{k+1}^{k+l} x_i^2 + < Ax'', x'' >\}v, v) + ((\sum_{k+1}^{k+l} x_i^2)^2 v, v) \geq 0, \forall v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n-k}).$$

E cioè ,

$$\{(\mathrm{Tr}^+(Q_2))^2 + \mathrm{Tr}^+(Q_2^2) + \mathrm{Tr}Q_3 + p_2^w(\rho)\}\|v\|^2 +$$

$$+(\{\sum_{k+1}^{k+l}(2\mathrm{Tr}^+Q_2 + \lambda_i)x_i^2\}v, v) + ((\sum_{k+1}^{k+l} x_i^2)^2 v, v) \geq 0.$$

Chiamo ora y la coordinata di una direzione in Ker$(A-\beta I)$. Si può supporre che x'' si possa scrivere come $x'' = (\tilde{x}, y)$. Sia allora $v = v_1^\varepsilon(\tilde{x}, x''')v_2(y)$ con

$$v_1^\varepsilon(\tilde{x}, x''') = v_1(\frac{\tilde{x}}{\varepsilon}, \frac{x'''}{\varepsilon})\varepsilon^{\frac{k-n+1}{2}}, \ \varepsilon > 0, v_1 \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n-k-1}), \|v_1\| = 1.$$

Facendo il limite per $\varepsilon \to 0+$ si ottiene, con $c = p_2^w(\rho)$ e $\Gamma^2 := (\mathrm{Tr}^+(Q_2))^2 + \mathrm{Tr}^+(Q_2^2) + \mathrm{Tr}Q_3 + c \geq 0$,

$$(\{((\mathrm{Tr}^+(Q_2))^2+\mathrm{Tr}^+(Q_2^2)+\mathrm{Tr}Q_3+c)+2(\mathrm{Tr}^+Q_2+\frac{\beta}{2})y^2+y^4\}v_2, v_2)_{L^2(\mathbf{R})} \geq 0. \tag{20}$$

Considero allora la disuguaglianza

$$(i) \qquad p(y^2) = y^4 + 2(\mathrm{Tr}^+Q_2 + \frac{1}{2}\beta)y^2 + \Gamma^2 \geq 0,$$

e definisco $\gamma_- := -\mathrm{Tr}^+Q_2 - |\Gamma|$, $\gamma_+ = -\mathrm{Tr}^+Q_2 + |\Gamma|$.
Se si ha che $\mathrm{Tr}^+Q_2 + \beta/2 \geq 0$, allora (i) vale $\forall y \in \mathbf{R}$, e, in particolare, $\beta/2 \geq \gamma_-$.
Perciò si supponga che $\mathrm{Tr}^+Q_2 + \beta/2 = -|\mathrm{Tr}^+Q_2 + \beta/2| < 0$.
Considerando il $\frac{1}{4}-$discriminante di (i) si hanno i seguenti due casi:

$$(A) \qquad |\frac{1}{2}\beta + \mathrm{Tr}^+Q_2|^2 - \Gamma^2 > 0;$$

$$(B) \qquad |\frac{1}{2}\beta + \mathrm{Tr}^+Q_2|^2 - \Gamma^2 \leq 0.$$

Nel caso (A) :

$$p(y^2) = 0 \Longleftrightarrow y^2 = y_\pm^2 = |\mathrm{Tr}^+Q_2 + \beta/2| \pm \sqrt{|\mathrm{Tr}^+Q_2 + \beta/2| - \Gamma^2}.$$

Faccio osservare che $y_-^2 \geq 0$. Perciò $p(y^2) \geq 0 \Longleftrightarrow y^2 \in [0, y_-^2] \cup [y_+^2, +\infty)$.
Se $I = [y_-^2, y_+^2]$, prendo $v_2 \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ tale che

$$0 \leq v_2 \leq 1, \ v_2 \equiv 1 \text{ su } \frac{1}{4}I, v_2 \equiv 0 \text{ fuori da } \frac{1}{2}I.$$

Allora $p(y^2) < 0$ su $\mathrm{supp}(v_2)$, il che dà

$$(\{\Gamma^2 + 2(\mathrm{Tr}^+Q_2 + \frac{\beta}{2})y^2 + y^4\}v_2, v_2) < 0,$$

una contraddizione. Perciò (A) non può valere. E allora (B) deve essere vera, da cui

$$|\frac{\beta}{2} + \mathrm{Tr}^+Q_2| \leq |\Gamma|,$$

i.e.

$$\gamma_- \leq \frac{1}{2}\beta \leq \gamma_+$$

e (20) è banalmente soddisfatta.
In conclusione si ha sempre: $\beta/2 \geq \gamma_-$. •

Sufficienza.

Come detto sopra, si prova dapprima che la (8) vale microlocalmente per ogni cut-off pseudodifferenziale di ordine 0. Si ha la seguente

Proposizione. *Sia $\psi(x,D)$, con $\psi(x,\xi) \in S^0$ a valori reali, un cut-off microlocale propriamente supportato su un intorno compatto del compatto K. Allora esiste $C_K > 0$ tale che*

$$(P\psi(x,D)u, \psi(x,D)u) \geq -C_K \|u\|^2_{(1/2)}, \quad u \in C_0^\infty(K). \tag{21}$$

Traccia della prova. Faccio subito osservare che posso restringere la mia analisi all'insieme $\{\rho = (x,\xi) \in T^*(X) \setminus 0;\ |\xi| > 1\}$, poiché la disuguaglianza è sicuramente vera per i $|\xi| \leq 1$, essendo l'operatore, così microlocalizzato, *regolarizzante*[7].
Considero allora $\rho = (x^0, \xi^0) \in \Sigma$ con $|\xi^0| > 1$. Come già detto, voglio far vedere che è possibile scrivere, assumendo disuguaglianze strette nelle condizioni (9) e (10), P nella forma $P = Q^*Q + R$, microlocalmente intorno a ρ, dove $Q \in \Psi^2_{phg}$, $Q = Q^* \mathrm{mod} \Psi^0$, e $R = R^* \in \Psi^3_{phg}$ tale che le ipotesi per ottenere (6) siano soddisfatte.
Da lemmi precedenti segue che, se il simbolo di Q è scritto nella forma $q_2 + q_1 + \dots$,

$$r_3(x,\xi) = p_3^s(x,\xi) - 2q_2(x,\xi)q_1^s(x,\xi).$$

Espandendo in serie di Taylor con punto iniziale $\rho \in \Sigma$, si ha che, chiamando $\gamma = q_1^s(\rho)$, bisogna cercare γ in modo tale da soddisfare le condizioni:

$$Q_3(x,\xi) - 2\gamma Q_2(x,\xi) > 0, \quad \forall (x,\xi) \in N_\rho\Sigma \setminus \{(0,0)\};$$

[7]Con ciò intendo dire che l'operatore muta $\mathcal{E}'(X)$ in $C^\infty(X)$.

$$Q_3(x,\xi) - 2\gamma Q_2(x,\xi) = 0, \quad \forall (x,\xi) \in T_\rho\Sigma.$$

(Qui $N_\rho\Sigma$ è lo spazio normale a Σ in ρ.)
Posso scegliere coordinate simplettiche (x,ξ) tali che le suddette condizioni si scrivono nella forma:

$$\sum_1^k (\alpha_j - 2\gamma\mu_j)(x_j^2 + \xi_j^2) + \sum_{k+1}^{k+l} (\lambda_j - 2\gamma)x_j^2 > 0,$$

ed uguale a 0 per $(x,\xi) \in T_\rho\Sigma = \{x' = \xi' = 0, x'' = 0\}$. Deve perciò essere:

$$\gamma < \frac{1}{2}\beta, \quad \text{e} \quad \gamma < \min_{1\le i\le k} \frac{\alpha_i}{2\mu_i}.$$

E quindi $\gamma \in (-\infty, \min\{\beta/2, \min\{\alpha_i/(2\mu_i); 1 \le i \le k\}\})$.
Per ipotesi $p_2^w(\rho)$ è scelto in modo tale che

$$\Gamma^2 = p_2^w(\rho) + (\mathrm{Tr}^+(Q_2))^2 + \mathrm{Tr}^+(Q_2^2) + \mathrm{Tr}Q_3 > 0.$$

Ho anche che

$$r_2^s(\rho) = p_2^w(\rho) + \frac{1}{4}\sum_1^n \{\partial_{\xi_i} q_2, \partial_{x_i} q_2\}(\rho) - (q_1^s(\rho))^2 = p_2^w(\rho) + \mathrm{Tr}^+ Q_2^2 - \gamma^2.$$

Poichè

$$\mathrm{Tr}^+(Q_3 - 2\gamma Q_2) = \sum_1^k (\alpha_j - 2\gamma\mu_j) = \mathrm{Tr}Q_3 - 2\gamma \mathrm{Tr}^+ Q_2,$$

la condizione (11) ora prende la forma, con $c = p_2^w(\rho)$,

$$\gamma^2 + 2\gamma \mathrm{Tr}^+ Q_2 - (c + \mathrm{Tr}^+ Q_2^2 + \mathrm{Tr}Q_3) \le 0.$$

Se $\gamma_\pm = \gamma_\pm(\rho) := -\mathrm{Tr}^+ Q_2 \pm |\Gamma(\rho)|$, deve allora essere $\gamma \in [\gamma_-, \gamma_+]$. Perciò , per costruire q_1^s, occorre che

$$\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+) \cap (-\infty, \min\{\frac{1}{2}\beta, \min_{1\le i\le k} \frac{\alpha_i}{2\mu_i}\}) \ne \emptyset.$$

Alcuni conti mostrano che le ipotesi garantiscono che la cosa è vera.

Posso allora costruire, in un intorno conico di ρ, il simbolo sotto-principale $q_1^s(x,\xi)$, omogeneo di grado 1, tale che

$$q_1^s(\tilde{\rho}) \in (\gamma_-(\tilde{\rho}), \gamma_+(\tilde{\rho})) \cap (-\infty, \min\{\frac{1}{2}\beta(\tilde{\rho}), \min_{1\le i\le k} \frac{\alpha_i(\tilde{\rho})}{2\mu_i(\tilde{\rho})}\}),$$

$\forall \tilde{\rho} \in \Sigma$ in un intorno di ρ, e $P = Q^*Q + R$ in un intorno di ρ, con simbolo sotto-principale di $Q = q_1^s(x,\xi)$. Se $\psi \in S^0$ ha supporto in un intorno conico sufficientemente piccolo di ρ, si ha allora, dalla Disuguaglianza di Hörmander, che

$$(P\psi(x,D)u, \psi(x,D)u) \ge (R\psi(x,D)u, \psi(x,D)u) \ge -C_K\|u\|^2_{(1/2)}, \quad u \in C_0^\infty(K).$$

Per $\rho \notin \Sigma$, un'applicazione ovvia del calcolo simbolico rende possibile trovare $Q \in \Psi^2_{phg}$, $Q = Q^* \mathrm{mod} \Psi^{-1}$, tale che $P - Q^*Q \in \Psi^1_{phg}(X)$ in un intorno sufficientemente piccolo di ρ. (Basta scegliere il simbolo di Q della forma $q_2 + q_1 + q_0 + \ldots$, con $q_1^s = q_2^{-1}p_3^s$, e $q_0^w = q_2^{-1}(p_2^w + 1/4\sum_1^n\{\partial_{\xi_k}q_2, \partial_{x_k}q_2\} - (q_1^s)^2)$.)
Perciò (21) vale anche in questo caso, in quanto

$$((P - Q^*Q)\psi(x,D)u, \psi(x,D)u) = O(\|u\|^2_{(1/2)}).$$

La prova è completa . •

Corollario *La stima microlocale (21) è stabile per perturbazioni del 2° ordine di P, nulle all'ordine 2 su Σ. In particolare, per $\theta \in \mathbf{R}$, esiste una costante $C_{K,\theta} > 0$ tale che*

(22) $(P\psi(x,D)u, \psi(x,D)u) + \theta \mathrm{Re}(A\psi(x,D)u, \psi(x,D)u) \ge -C_{K,\theta}\|u\|^2_{(1/2)}.$

Qui ψ è un cut-off microlocale come nella precedente Proposizione e $A \in \Psi^2_{phg}$, $A = \mathrm{Op}(q_2)$. In più , dalla prova della Proposizione segue che la partizione dell'unità microlocale, per la quale (21) vale, non dipende dalla perturbazione.

(Ciò è dovuto al fatto che la parte difficile della stima "vive" su Σ.)

Concludo ora la prova della "sufficienza" ottenendo la stima "locale". Scelgo delle $\psi_j(x,\xi) \in S^0$ a valori reali con supporto così piccolo che (22)

è valida per ogni ψ_j e

$$\sum_{j=1}^{N} \psi_j(x,\xi)^2 = 1 \quad \text{per } x \text{ "vicino" a } K.$$

Se $\Psi_j = \psi_j(x, D)$, è l'operatore ψdo corrispondente, che posso assumere propriamente supportato, allora ho che

$$(Pu,u) = \sum_{j=1}^{N}(P\Psi_j u, \Psi_j u) + ((1 - \sum_{j=1}^{N} \Psi_j^* \Psi_j)Pu, u) + \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n}([\Psi_j, P]u, \Psi_j u).$$

Faccio notare che

$$\mathrm{Re}([A, \Psi_j]u, \Psi_j u) = O(\|u\|^2_{(1/2)}),$$

$$\mathrm{Re}((1 - \sum_{1}^{N} \Psi_j^* \Psi_j)Au, u) = O(\|u\|^2_{(0)}).$$

(Ciò è importante poiché si deve perturbare la stima come nel Corollario.) Si stimano i commutatori e, tramite la disuguaglianza sharp di Gårding e il Corollario, si ottiene la disuguaglianza cercata. Questo conclude la prova del Teorema . •

Tutti i dettagli di quanto detto si possono trovare in [PP].

Concludo dando un esempio di operatore il quale **non** soddisfa la stima di quasi-positività . Sia

$$P = \left(L - \frac{1}{2}|D_2|\right)^2 - \frac{1}{2}D_2^2,$$

dove $L = D_1^2 + x_1^2 D_2^2$. In questo caso si ha che il simbolo di Weyl dell'operatore è dato da

$$p(x,\xi) = (\xi_1^2 + x_1^2\xi_2^2)^2 - |\xi_2|(\xi_1^2 + x_1^2\xi_2^2) - \frac{5}{4}|\xi_2|^2, \quad |\xi_2| \neq 0.$$

Usando il Teorema sopra esposto, si riconosce che il polinomio (19) non è non-negativo. Il fatto che l'operatore non sia quasi-positivo può però essere visto anche facendo un calcolo diretto (e istruttivo!) usando funzioni test ad-hoc: se Q_0 è il cubo unitario di $\mathbf{R}^2$, cioè l'insieme $\{(x_1, x_2);\ |x_1|,$

$|x_2| < 1\}$, sia $\varphi \in C_0^\infty(Q_0)$ tale che $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ su $1/2Q_0$, e sia, per $\nu > 0$,

$$\phi_\nu(x_1, x_2) = \int e^{ix_2\xi_2}\varphi_0(x_1|\xi_2|^{1/2})\psi_0(\nu^{-1}\xi_2)d\xi_2 \ \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2),$$

dove $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ è soluzione di $(D_y^2 + y^2)\varphi_0(y) = \varphi_0(y)$, e $\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ è tale che $\psi_0 \equiv 0$ per $|\xi_2| \leq 1$. Si ha allora che $\psi_\nu(x_1, x_2) := \varphi(x_1, x_2)\phi_\nu(x_1, x_2) \in C_0^\infty(Q_0)$ e che

$$\nu^{-2}(P\psi_\nu, \psi_\nu) \longrightarrow -\infty, \quad \text{mentre} \quad \nu^{-2}\|\psi_\nu\|^2_{(1/2)} \longrightarrow 0,$$

per $\nu \to +\infty$. Perciò la stima (8) non può valere mentre chiaramente vale (6).

Bibliografia.

[F] C.L.Fefferman, *The Uncertainty Principle*, Bull. of A.M.S. Vol.9, No.2, 1983.

[FP] C.L.Fefferman and D.H.Phong, *The Uncertainty Principle and Sharp Gårding Inequalities*, Comm. Pure Appl. Math. 34, 1981.

[H1] L.Hörmander, *The Cauchy Problem for Differential Equations with Double Characteristics*, Journal D'Analyse Mathématique, Vol.32, 1977.

[H2] L.Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators, I-II-III-IV*, Springer-Verlag, 1983-1985.

[M] A.Melin, *Lower Bounds for Pseudodifferential Operators*, Arkiv för Matematik 9, 1971.

[PP] C.Parenti and A.Parmeggiani, *A Necessary and Sufficient Condition for a Lower Bound for 4th-Order Pseudodifferential Operators*, Preprint, Università di Bologna, 1994.

[P] A.Parmeggiani, *Microlocalizzazioni Sub-Unitarie di Operatori Pseudodifferenziali*, Seminario di Analisi Matematica dell'Università di Bologna, A.A. 1992-93, Tecnoprint Bologna, 1993.